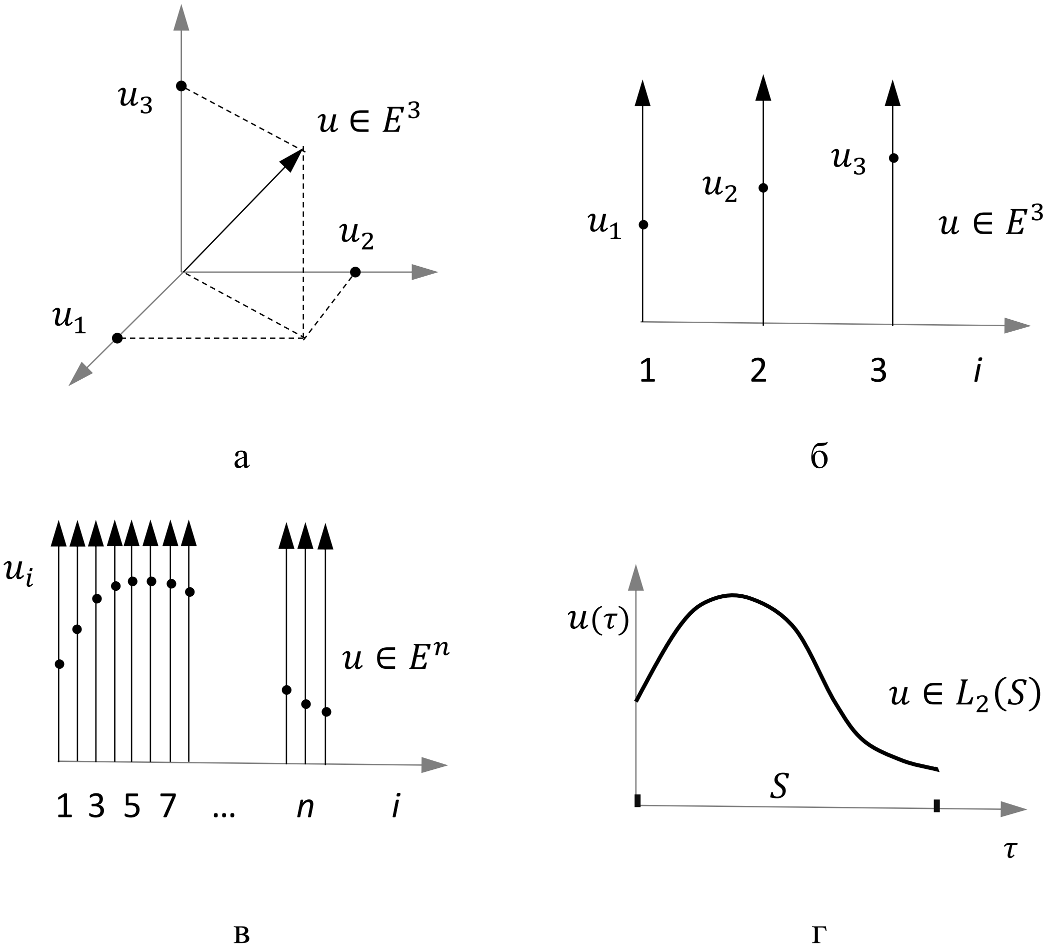
По материалам книги (рабочий вариант) Толстых В.К. Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем

Бесконечномерное управление

Переход от **вектора** управления $u \in E^n$, при $n \to \infty$,

к **функции** управления $u(\tau) \in L_2(s)$. где $\tau \in S$ – пространственно-временная координата управления.



- Пространства E^n и L_2 – **евклидовы** (в них определено скалярное произведение):

$$\langle a, b\rangle_{E^n} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\,, \qquad \langle a, b\rangle_{L_2(s)} = \int_S ab\, dS,$$

- и **банаховы**, где норма (величина элементов, расстояние между ними):

$$\|a\|_{E^n} = \sqrt{\langle a, a\rangle_{E^n}}, \qquad \|a\|_{L_2(s)} = \sqrt{\langle a, a\rangle_{L_2(s)}}.$$

Целевой функционал

- Если некоторому числу x ставится в соответствие по правилу f число u, то говорят, что задана **функция** $u = f(x)$.

- Если же функции $u(x)$ ставится в соответствие число J, то говорят, что задан **функционал** $J(u)$. Число $J(u)$ называется значением функционала J на элементе u.

Обычно функционалы представляют собой определённые интегралы от функций, например,

$$J(u) = \int_0^1 [(u-5)u + 2u]dx,$$

где $x \in [0,1] = S \ni \tau$.

- **Линейный функционал** – если число $J(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 J(u_1) + a_2 J(u_2)$.
- **Квадратичный функционал** определяется формой:

$$J(u) = \Phi(u,u) + l(u) \in E,$$

где $\Phi(u,u)$ – *билинейный функционал*; $l(u)$ – линейный функционал. Блинейность означает, что $\Phi(u,u)$ – линейный относительно первого и второго аргумента. Примером квадратичного функционала[1] является скалярное произведение $\langle u,u \rangle_{L_2}$.

Задача оптимизации, оптимального управления

Найти функцию-управление $u(\tau)$ на S, которая минимизирует целевой функционал:

$$u_* = arg \min J(u)$$

Это – прямой экстремальный подход в теории оптимального управления.

[1] Предложите в лабораторной работе свой квадратичный функционал.

Градиент целевого функционала

Градиент определяет главную линейную часть приращения функционала:

$$\Delta J = J(u+\delta u) - J(u) = \langle \nabla J(u), \delta u \rangle_{L_2(s)} + o(\|\delta u\|),$$

δu – **вариация управления** (небольшое изменение, отклонение),

первая вариация функционала:

$$\delta J = \langle \nabla J(u), \delta u \rangle_{L_2(s)}.$$

Например, если $J(u) = \int_S \ [(u-5)u + 2u]dx$, то

$$\delta J = \langle [(u-5)u + 2u]'_u, \delta u \rangle_{L_2(s)} = \langle [u^2 - 3u]'_u, \delta u \rangle_{L_2(s)} =$$
$$\langle 2u - 3, \delta u \rangle_{L_2(s)}.$$

Следовательно **градиент**

$$\nabla J(u;\tau) = 2u(\tau) - 3, \qquad \tau \in S.$$

- Необходимое условие оптимальности (**НУО**):

$$\|\nabla J(u_*)\|_{L_2(s)} = 0.$$

- Градиентный метод наискорейшего спуска (**МНС**):

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \nabla J^k(u^k;\tau), \qquad \tau \in S, \ \ k = 0,1 \ldots$$
$$b^k = arg \min_{b>0} J(u^k + bd^k).$$

- Метод с регулируемым направлением спуска (**МРНС**) для минимизации квадратичных функционалов:

$$u^{k+1} = u^k - b^k \alpha \nabla J^k \ \text{ на } S, \ \ k = 0,1 \ldots,$$

или в развёрнутом виде:

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \alpha(\tau) \nabla J(u^k;\tau), \qquad \tau \in S, \ \ k = 0,1 \ldots$$

$\alpha(\tau) \in L_{2+}(S)$ – параметр регулирования направления спуска.

Регулирование направления спуска

Решение задачи оптимизации следует начинать с параметром $\alpha = 1$, т.е. с тестирования ситуации посредством МНС.

Для выбора $\alpha(\tau)$ необходимо использовать шаблонные приближения $\tilde{u}^0$ на первой итерации:

$$\alpha = \left|\frac{\tilde{u}^0 - u^0}{\nabla J(u^0)}\right|, \qquad sign\, \nabla J(u^0;\tau) = const \quad \text{на } S.$$

Идея шаблонов

Шаблонный шаг $|\tilde{u}^0 - u^0|$ должен быть заметным для всех $\tau \in S$ и он должен приводить к так же заметным на S изменениям градиента $|\nabla J(\tilde{u}^0) - \nabla J(u^0)|$.

Варианты шаблонов (при условии $sign\, \nabla J(u^0;\tau) = const$)

- шаг «под 45°»:

$$\tilde{u}^0(\tau) = u^0(\tau) \pm \delta, \qquad \tau \in S,$$

- пропорциональное изменение начального приближения:

$$\tilde{u}^0(\tau) = \lambda u^0(\tau), \qquad u^0(\tau) \neq 0, \;\; \tau \in S,$$

- другая функция $\varphi(\tau) \in L_2(S_\Delta)$:

$$\tilde{u}^0(\tau) = \varphi(\tau)\,, \qquad \tau \in S,$$

Примеры. Задача оптимального управления тепловыми процессами

Управление – это поток тепла в реактор $u(t) \in L_2(S)$, $S = (t_0, t_1)$, для удержания заданной температуры T_*:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} (T - T_*)^2 dt \to \min.$$

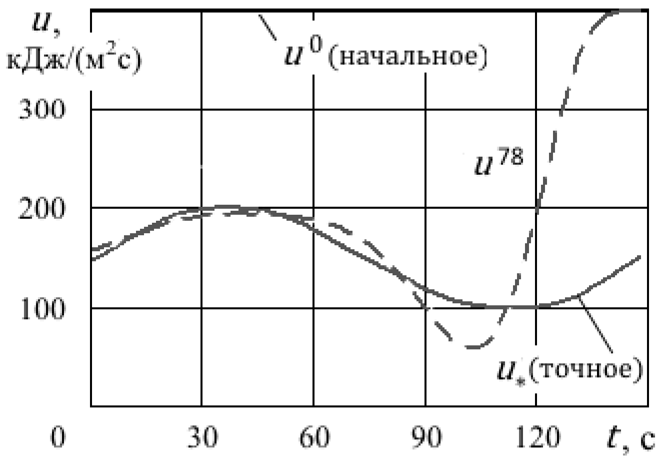
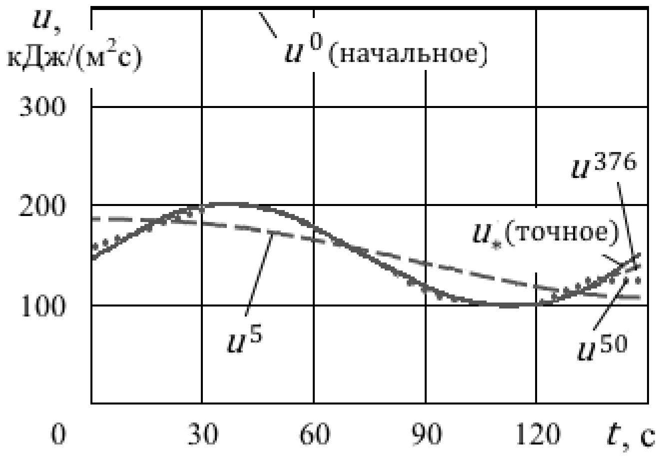


Рисунок 5.1 – Оптимизация МНС

Сходимость прекратилась на $k = 78$, $\|u^{78} - u_*\|$=1.21·10^6, J^{78}=0.9.



$$\alpha(t) = \left| \frac{0.2u^0}{\nabla J(u^0; t)} \right|, \quad t \in S.$$

Рисунок 5.4 – Оптимизация МРНС

Сходимость прекратилась на $k = 376$, $\|u^{376} - u_*\|$=2.3·10^4 , J^{376}=1.4·10^{-5}.